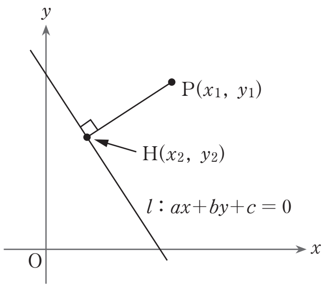
PART5 点と直線の距離

要点 ① 点と直線の距離

点 P から直線 l に下ろした垂線 PH の長さを「　　　　　　　　」という。

点 $P(x_1, y_1)$ と直線 $l: ax+by+c=0$ の距離を求める。



$H(x_2, y_2)$ とすると $PH^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ …… ①

$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき，直線 l の傾きは　　　，直線 PH の

傾きは　　　　　である。直線 l と直線 PH は垂直であるから

$$\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}= \qquad \text{すなわち} \quad \frac{x_2-x_1}{a}=\frac{y_2-y_1}{b}$$

この式の値を k とすると $\dfrac{x_2-x_1}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{b}=k$ より $x_2-x_1=ak,\ y_2-y_1=bk$ …… ②

②を①に代入すると $PH^2=(ak)^2+(bk)^2=(a^2+b^2)k^2$ …… ③

また，$H(x_2, y_2)$ は直線 l 上の点であるから $ax_2+by_2+c=0$

この式に，② ⇔ $x_2=x_1+ak,\ y_2=y_1+bk$ を代入して

$$a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0 \qquad \text{よって} \quad k=-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2} \ \cdots\cdots \ ④$$

④を③に代入すると $PH^2=(a^2+b^2)\cdot\dfrac{(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)^2}=\dfrac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}$

$PH \geqq 0$ より $PH=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

これは，a，b のうちいずれか一方が 0 のときも成り立つ。

以上より，次のことが成り立つ。

点と直線の距離

点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

例 点 (2, 1) と直線 $3x-4y+2=0$ の距離 d は $d=\dfrac{|\qquad\qquad|}{\sqrt{\qquad\qquad}}=\dfrac{|4|}{\sqrt{25}}=\dfrac{4}{5}$

[MEMO]

5 次の点と直線の距離を求めよ。

(1) 原点と直線 $3x+4y+5=0$

(2) 点 $(1,\ -3)$ と直線 $x-2y-13=0$

Point Pickup

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

・直線の式を，$ax+by+c=0$（一般形）の形にする。

・分母は，直線の x，y の係数の 2 乗の和の $\sqrt{}$（正の平方根）

分子は，直線の式の左辺の x，y にそれぞれ点の x 座標，y 座標を代入したものの絶対値

第 5 講 PART5 確認問題

次の点と直線の距離を求めよ。

1 原点と直線 $4x+3y-10=0$

[ア]

2 点 $(3,\ 1)$ と直線 $x+2y+5=0$

[イ]$\sqrt{[ウ]}$

PART5 点と直線の距離

5 次の点と直線の距離を求めよ。

(1) 原点と直線 $3x+4y+5=0$

(2) 点 $(1,\ -3)$ と直線 $x-2y-13=0$

[解答]

(1) $\dfrac{|3\cdot 0+4\cdot 0+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{25}}=\dfrac{5}{5}=1$

(2) $\dfrac{|1-2\cdot(-3)-13|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

第 5 講　PART5 確認問題 解答

1

[正解] ア：2

[解説]

原点 (0, 0) と直線 $4x+3y-10=0$ の距離は

$$\frac{|4\cdot0+3\cdot0-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{25}}$$ [A]

$$=\frac{10}{5}=2$$

[A]　点と直線の距離
点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

2

[正解] イ：2，ウ：5

[解説]

点 (3, 1) と直線 $x+2y+5=0$ の距離は

$$\frac{|1\cdot3+2\cdot1+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|10|}{\sqrt{5}}$$ [B]

$$=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

[B]　点と直線の距離
点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$